Intangible Capital

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Aplicaciones de los juegos cooperativos al contexto empresarial

Rafael Amer
Universitat Politècnica de Catalunya
(Spain)
rafel.amer@upc.edu

Francesc Carreras
Universitat Politècnica de Catalunya
(Spain)
francesc.carreras@upc.edu

Antonio Magaña
Universitat Politècnica de Catalunya
(Spain)
antonio.magana@upc.edu

Received October, 2007
Accepted February, 2008

Resumen:

Presentamos diversas aplicaciones de los juegos cooperativos y del valor de Shapley al contexto empresarial. Entre ellas destacamos el reparto de costes o beneficios. En la parte teórica se describe el marco axiomático propuesto por Shapley y se estudian las propiedades del valor. También se muestra la utilidad de los juegos simples para describir y analizar los sistemas de decisión colectiva por votación. Muchos de estos sistemas son representables como juegos de mayoría ponderada, una clase de juegos simples. Uno de los problemas más interesantes en este caso es la definición de una medida de la distribución de poder entre los agentes involucrados en el sistema. Este problema recibe una solución satisfactoria mediante el índice de poder de Shapley–Shubik, que es la restricción del valor de Shapley a los juegos simples.

Palabras clave: juego cooperativo, valor de Shapley, índice de poder.

Intangible Capital

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Title: Applications of cooperative games to business activities

Abstract:

We show several applications of the cooperative game theory and the Shapley value to business activities. Among them we emphasize on the sharing of costs or profits. In the theoretical part, the axiomatic setting proposed by Shapley is described and the properties of the value are studied. It is also shown the usefulness of simple games to describe and analyze collective decision systems ruled by voting. Many of these systems admit a representation as weighted majority games, a class of simple games. One of the most interesting problems in this case is to define a measure of the power distribution among the agents involved in the system. This problem receives a nice solution by means of the Shapley–Shubik index of power, which is the restriction of the Shapley value to simple games.

Keywords: cooperative game, Shapley value, power index.

1. Introducción

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas que se dedica al estudio de las situaciones conflictivas que aparecen cuando un colectivo de agentes, con intereses contrapuestos o al menos no concordantes, debe tomar decisiones individuales que les afectan mutuamente. Es tradicional que el conflicto se denomine *juego*, y los agentes involucrados, *jugadores*. Así lo haremos a lo largo de este artículo, en el que pretendemos aplicar conceptos y resultados de la teoría de juegos al contexto empresarial.

Los juegos presentan casi siempre elementos de conflicto entre las aspiraciones de los jugadores. Cuando las reglas del juego lo permiten, los agentes pueden tratar de solventar, mediante la *cooperación*, las dificultades derivadas de la *competencia* existente entre ellos. La distinción entre juegos cooperativos y no cooperativos señala las dos grandes líneas de la teoría de juegos y, aunque el modelo preferido por los economistas es el no cooperativo, pensamos que el material incluido aquí será suficiente para poner de manifiesto las notables posibilidades de aplicación de los juegos cooperativos a determinados problemas empresariales.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

¿Qué elementos introduce la teoría cooperativa en el análisis de un juego? En primer lugar, se permite la *comunicación* entre los jugadores. Una consecuencia básica de este hecho es la posibilidad de que se establezcan *acuerdos* para coordinar estrategias en beneficio mutuo, acuerdos que suelen implicar pagos laterales posteriores entre los jugadores. Debe quedar claro que aquí se supone que los acuerdos son contractuales, es decir, con fuerza para obligar, y que están permitidos los pagos laterales posteriores que hemos mencionado.

La teoría cooperativa se centra, más que en las posibilidades estratégicas individuales de los jugadores, en las expectativas de que disponen las "coaliciones" que dichos jugadores puedan formar. Conviene, pues, precisar ante todo este término.

Definición 1. Una *coalición* es cualquier subconjunto del conjunto de jugadores.

Este concepto no tiene, a priori, connotaciones de alianza. Cada coalición es la reunión de una parte del conjunto de jugadores, que puede formarse o no, pero es preciso considerarlas todas para determinar el beneficio que cada una pueda obtener y disponer así de una visión global de la posición de cada jugador en el juego.

La definición de coalición incluye, entre otros, el conjunto vacío -denotado por $\varnothing$-, los subconjuntos formados por un único jugador y el conjunto total. En un conjunto N con n jugadores hay exactamente 2^n coaliciones. La teoría cooperativa permite estudiar cómodamente juegos con un número considerable de jugadores.

La información básica que se maneja en el estudio de un juego cooperativo es la *utilidad* total que puede alcanzar cada coalición por sí misma cuando sus miembros optimizan la coordinación de sus estrategias. Nada se supone de la actitud de los jugadores ajenos pero, adoptando el principio de la prudencia, se asigna a cada coalición la utilidad que obtendría en el peor escenario posible. Lo que denominamos "utilidad" representa por lo general pagos, beneficios, satisfacción, capacidad de acción o de decisión, etc.; en ocasiones, también puede representar costes u otras valoraciones de las expectativas de cada coalición.

Ejemplo 1 -*Plan Prever*-. Un hombre posee un coche viejo, con más de 10 años de antigüedad, que para él ya no tiene ningún valor. Quiere deshacerse del vehículo y consulta a un chatarrero que, después de examinar el coche, estaría dispuesto a

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

pagar por él hasta 180€, porque ha observado que algunas de sus piezas, con gran demanda en su negocio, están aún en buen estado. Un vecino del propietario del coche, al conocer la situación, piensa que podría ofrecer hasta 480€ por el coche, puesto que está a punto de comprar uno nuevo para su hija y sabe que entregando el coche de su vecino podría ahorrarse, gracias al plan Prever, esa cantidad e incluso algo más en el precio del coche que quiere comprar.

En este juego, si el propietario del vehículo lo vende al chatarrero o a su vecino se está generando utilidad. Para simplificar la notación, denotaremos por 1, 2 y 3 al vendedor, el chatarrero y el vecino, respectivamente. Escribamos las utilidades al alcance de cada coalición. Las coaliciones individuales no consiguen ningún beneficio. La coalición {1,2} puede llegar a crear 180€ de utilidad, que ambos jugadores pueden repartirse como deseen. Por ejemplo, si acuerdan un precio de 100€, el vendedor obtiene un beneficio de 100€ (el coche para él ya no tenía ningún valor) y el chatarrero obtiene un beneficio de 80€ (estaba dispuesto a ofrecer 180€). Análogamente, la coalición {1,3} puede generar 480€. La coalición {2,3} no genera ninguna utilidad. Por último, también podríamos pensar en la coalición {1,2,3}, que puede conseguir 480€ entregando el coche al jugador 3. Esquemáticamente, escribimos estas utilidades de la manera siguiente:

- $u\,(1) = u\,(2) = u\,(3) = 0$
- $u\,(1,2) = 180$
- $u\,(1,3) = 480$
- $u\,(2,3) = 0$
- $u\,(1,2,3) = 480$

Ahora se plantea una cuestión interesante y al mismo tiempo difícil de contestar. Suponiendo que los tres jugadores se ponen de acuerdo para obtener los 480€ de utilidad, ¿cómo repartirla?

Hay tantas respuestas posibles como criterios diferentes seamos capaces de establecer -aun con argumentos peregrinos-. Por ejemplo, el reparto equitativo -160€ para cada uno-, o dando los 480€ al primer jugador y nada a los demás.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Estamos ante el punto principal de todo juego cooperativo: el reparto de la utilidad obtenida por los jugadores al coordinar sus estrategias. Buscaremos una regla general de reparto que sea objetivamente "justa", en el sentido que se precisará, y que evalúe el problema exclusivamente en términos de las utilidades asignadas a las coaliciones. Pero antes debemos introducir nuevos conceptos.

2. Juegos cooperativos

Formalicemos la idea de juego cooperativo.

Definición 2. Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ un conjunto de jugadores ($n \geq 2$). Un *juego cooperativo* en N es una función u *-función característica* del juego- que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ un número real $u(S)$. La única condición que se impone a esta función u es que $u(\varnothing) = 0$.

En la práctica, como ya hemos hecho en el ejemplo 1, escribiremos simplemente $u(1)$, u (1,2)… en vez de $u(\{1\})$, $u(\{1,2\})$…

En general trataremos con juegos *no negativos*, es decir, tales que la función característica no toma valores negativos: $u(S) \geq 0$ para toda coalición $S \subseteq N$.

También será habitual manejar juegos monótonos: un juego es *monótono* si al añadirse jugadores a una coalición cualquiera no disminuye la utilidad esperada por dicha coalición. Formalmente, u es monótono si $u(S) \leq u(T)$ cuando $S \subset T$.

Ejemplo 2 *-Distribución de costes-*. Supongamos que tres localidades están interesadas en recibir el suministro de un cierto fluido.

Según indica la figura 1, en un sistema de referencia cartesiano las localidades están situadas en los puntos A(2,2), B(−2,2) y C(−2,−2), y el centro de distribución del fluido en el punto S(2,0). Las unidades indican kilómetros. El coste derivado del establecimiento de canalizaciones desde S hasta cada localidad es proporcional a la distancia, a razón de 100000 euros/km.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

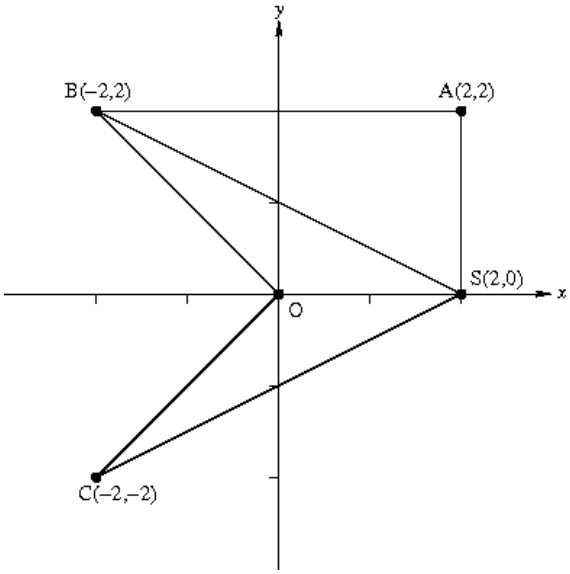

Figura 1. "Líneas del suministro a tres localidades"

Aprovechando en algún caso las condiciones orográficas, es posible establecer canalizaciones que permitan surtir simultáneamente a dos localidades -o incluso a las tres- según se indica a continuación -ver figura 1-:

- Hasta A y B siguiendo los tramos SA y AB
- Hasta A y C siguiendo los tramos SA y SC
- Hasta B y C siguiendo los tramos SO, OB y OC, donde O(0,0) es el origen de coordenadas
- A las tres localidades siguiendo los tramos SA, SO, OB y OC

El coste del trazado que establece el suministro a cada posible "coalición" de localidades viene dado, en miles de euros, por la siguiente función c, que cabe interpretar como la función característica de un juego cooperativo en el conjunto de jugadores N = {A,B,C} añadiendo $c(\varnothing) = 0$:

$$c(\text{A}) = 200, \quad c(\text{B}) = 448, \quad c(\text{C}) = 448,$$
$$c(\text{A,B}) = 600, \quad c(\text{A,C}) = 648, \quad c(\text{B,C}) = 766, \quad c(\text{A,B,C}) = 966.$$

Suponiendo que las tres localidades contratan el suministro conjunto y deben pagar, por tanto, 966 millares de euros, ¿cómo distribuir este coste entre las tres? Observando simplemente los costes individuales parece evidente que el reparto

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

equitativo no es justo. El reparto proporcional a dichos costes individuales tampoco lo es porque no tiene en cuenta los costes intermedios -para las coaliciones de dos elementos-: obsérvese, por ejemplo, que conectar a la vez con A y C no supone ningún ahorro con respecto a la suma de los costes individuales, mientras que las conexiones simultáneas con A y B o con B y C comportan reducciones del coste. Una vez más, debemos preguntarnos si existe algún método que permita efectuar de forma satisfactoria el reparto teniendo en cuenta *todos* los datos del problema.

Ejemplo 3 -*Grupos de compra*-. Un *grupo de compra* se constituye cuando dos o más comerciantes independientes, con experiencia en un mismo sector y vínculos personales de confianza, se comprometen a realizar conjuntamente una o varias de sus actividades, y muy en especial la compra de mercancías a los fabricantes o grandes distribuidores.

La formación de un grupo de compra tiene ventajas obvias: conseguir mejores condiciones de compra, seleccionar los productos más adecuados y disponer de servicios comunes -como, por ejemplo, publicidad conjunta, ofertas de promoción o gestión común de *stocks*-.

Para fijar ideas, supongamos que tres empresas, que representaremos por A, B y C, necesitan proveerse de forma periódica de 1000, 1500 y 2000 unidades de cierto producto, respectivamente. El mayorista que suministra el producto tiene fijado un precio unitario de 1 euro, pero ofrece también los descuentos graduales siguientes -*rappels*- según el volumen del pedido que recibe:

- Nada para las primeras 1000 unidades
- El 10% de descuento para las unidades desde 1001 hasta 2000
- El 15% para las unidades desde 2001 a 3000
- El 20% para las unidades desde 3000 en adelante

La tabla 1 expone las condiciones del suministro a cada posible grupo de empresas.

Grupo	Pedido acumulado	Coste real	Ahorro
{A}	1000	1000	0
{B}	1500	1450	50
{C}	2000	1900	100

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

{A,B}	2500	2325	175
{A,C}	3000	2750	250
{B,C}	3500	3150	350
{A,B,C}	4500	3950	550

Tabla 1. "Suministros a las empresas"

En estas condiciones, nos encontramos con tres posibles juegos en el conjunto N = {A,B,C}. En primer lugar, el juego de distribución de *costes sin descuentos* c dado por la segunda columna de la tabla 1 -el volumen del pedido equivale al coste sin descuentos porque el precio unitario es de 1 euro-:

c(A) = 1000, c(B) = 1500, c(C) = 2000,
c(A,B) = 2500, c(A,C) = 3000, c(B,C) = 3500, c(A,B,C) = 4500.

En segundo lugar, el juego de distribución de *costes con descuentos* (o *costes reales*) d dado por la penúltima columna:

d(A) = 1000, d(B) = 1450, d(C) = 1900,
d(A,B) = 2325, d(A,C) = 2750, d(B,C) = 3150, d(A,B,C) = 3950.

Por último, el juego de distribución de *beneficios* b dado por la última columna:

b(A) = 0, b(B) = 50, b(C) = 100,
b(A,B) = 175, b(A,C) = 250, b(B,C) = 350, b(A,B,C) = 550.

Como en los ejemplos anteriores, la cuestión central es la siguiente: suponiendo que las tres empresas deciden formar el grupo de compra, ¿cómo deben distribuir el pago de los 3950 euros que cuesta su pedido conjunto? O, enunciado de forma alternativa en términos de ahorro: si cada empresa ha depositado en un fondo común el coste de su pedido sin descuentos -segunda columna de la tabla 1-, ¿cómo repartir los 550 euros que han ahorrado mediante la formación del grupo de compra, una vez pagada al mayorista la factura total de 3950 euros?

3. El valor de Shapley

En las secciones anteriores hemos expuesto problemas de reparto de utilidades -costes o beneficios-, dejando planteada en cada uno de ellos la necesidad de solución. En esta sección estudiamos el *valor de Shapley*, que permitirá resolver este tipo de conflictos.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Con su trabajo de 1953, el matemático Lloyd S. Shapley introdujo en la teoría de juegos el *método axiomático*:

1. Se proponen las propiedades razonables que desearíamos que cumpliera la solución
2. Se demuestra, si es posible, la existencia de alguna solución que cumpla dichas propiedades: esto da lugar a un *teorema de existencia*
3. Una vez hallada alguna solución, se estudia la posibilidad de que dicha solución sea única. Si el resultado es positivo, obtenemos un *teorema de unicidad* y se dice que esa única solución está caracterizada axiomáticamente por las propiedades propuestas

Naturalmente, para que las propiedades merezcan el nombre de *axiomas* es indispensable que sean sencillas, elegantes e intuitivamente aceptables. Y éste es el caso de las propiedades propuestas por Shapley. Para captar su significado, introducimos previamente varios conceptos relacionados con los juegos cooperativos y los ilustramos con los ejemplos que hemos ido viendo hasta ahora. En adelante, sea $N=\{1,2,...,n\}$ el conjunto de jugadores y sea u un juego cooperativo en N.

Definición 3. Sean i y S un jugador y una coalición tales que $i \in S$. La *contribución marginal* del jugador i a la coalición S en el juego u es la diferencia entre la utilidad que puede obtener la coalición (con el concurso de i) y la que podría obtener si i la abandona, es decir, $u(S) - u(S \setminus \{i\})$.

La idea de contribución marginal es clásica en economía y se adapta perfectamente al contexto de los juegos cooperativos en el que nos movemos. Podría decirse que mide el provecho que la coalición S debe a la presencia del jugador i. El problema suele ser que la utilidad al alcance de una coalición no basta para dar a cada uno de sus integrantes, como pago, su contribución marginal a la coalición.

Ejemplo 4. Veamos cuáles son las contribuciones marginales de la empresa A a cada una de las coaliciones a las que pertenece, con respecto al juego de beneficios b en *Grupos de compra* -ejemplo 3-. Aplicando la definición anterior tenemos:

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

- A la coalición {A}: b (A) – b ($\varnothing$) = 0
- A la coalición {A,B}: b (A,B) – b (B) = 125
- A la coalición {A,C}: b (A,C) – b (C) = 150
- A la coalición {A,B,C}: b (A,B,C) – b (B,C) = 200

Definición 4. Se dice que un jugador i es un jugador nulo en el juego u si todas sus contribuciones marginales en este juego son nulas, es decir, si para cualquier coalición S se tiene $u(S) = u(S \setminus \{i\})$.

Esto significa que cualquier coalición puede desprenderse de i sin ver afectada, ni positiva ni negativamente, su utilidad. En particular, debe ser $u(i) = 0$.

Ejemplo 5. En el juego de beneficios b de *Grupos de compra* no existen jugadores nulos. Sin embargo, es fácil comprobar que la empresa A, por ejemplo, sería un jugador nulo en dicho juego si y sólo si su demanda se redujera a 0 unidades. Tal como están las demandas de las otras empresas y la tabla de descuentos, cualquier demanda no nula de A daría contribución marginal positiva de esta empresa a alguna coalición salvo, quizás, a {A}.

Definición 5. Se dice que dos jugadores i y j son *equivalentes* en el juego u si

$$u(S \cup \{i\}) = u(S \cup \{j\}) \text{ para cualquier coalición } S \subseteq N \setminus \{i, j\}.$$

Ello implica que la contribución marginal de uno de ellos a cualquier coalición que le contenga es la misma, tanto si la coalición contiene al otro jugador, es decir,

$$u(S \cup \{j\} \cup \{i\}) - u(S \cup \{j\}) = u(S \cup \{i\} \cup \{j\}) - u(S \cup \{i\}),$$

como si no le contiene: $u(S \cup \{i\}) - u(S) = u(S \cup \{j\}) - u(S)$.

Ejemplo 6. En el juego de beneficios b de *Grupos de compra* no hay jugadores equivalentes. Es fácil ver que dos cualesquiera de las tres empresas serían equivalentes si y sólo si sus demandas fueran iguales.

Denotaremos por G_N el conjunto de todos los juegos que pueden definirse en N. Puesto que cada juego viene dado por una función a valores reales, es posible definir la suma de juegos y el producto de un juego por un número.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Definición 6. Sean $u, v \in G_N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

- La *suma* de u y v es el juego $u+v$ definido en N por $(u+v)(S) = u(S) + v(S)$ para cada coalición $S \subseteq N$
- El *producto* del número $\alpha \in \mathbb{R}$ por el juego u es el juego αu definido en N por $(\alpha u)(S) = \alpha . u(S)$ para cada coalición $S \subseteq N$

Ejemplo 7. Estas operaciones admiten sencillas interpretaciones en el contexto que estamos analizando. Volvamos al ejemplo de *Grupos de compra*.

- Comparando las columnas de la tabla incluida en el ejemplo 3, el lector comprobará fácilmente que el juego de costes sin descuentos es precisamente la suma del juego de costes reales y el juego de beneficios: $c = d + b$
- Supongamos que, en lugar de expresar los beneficios en euros, quisiéramos darlos en pesetas. Utilizando la constante de conversión α = 166,386 tendríamos un nuevo juego de beneficios dado por $b' = \alpha\, b$ donde, por ejemplo, b'(B,C) = 166,386 b(B,C) = 58235

En su artículo de 1953, Shapley plantea el problema de encontrar un *concepto de solución* aplicable a todos los juegos en un conjunto fijo de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$; es decir, una función $\phi : G_N \to \mathbb{R}^n$ que asigne a cada juego u un vector de pago a los jugadores

$$\phi[u] = (\phi_1[u], \phi_2[u], ..., \phi_n[u]) .$$

Evidentemente, existen muchas formas de establecer una tal función ϕ -y muchas de ellas sin ningún contenido de racionalidad-. Shapley supone implícitamente que los jugadores van a formar la coalición total N y van a acordar el reparto de los beneficios que comporta dicha asociación; y exige que la solución satisfaga ciertas propiedades -a nuestro entender, muy razonables-. Son las siguientes:

1. *Eficiencia*: $\sum_{i \in N} \phi_i[u] = u(N)$ para cada juego $u \in G_N$
2. *Jugador nulo*: si $i \in N$ es un jugador nulo en un juego u, entonces $\phi_i[u] = 0$
3. *Jugadores equivalentes*: si $i, j \in N$ son equivalentes en u, $\phi_i[u] = \phi_j[u]$

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

4. *Aditividad*: $\phi[u+v] = \phi[u] + \phi[v]$ para cualesquiera $u, v \in G_N$

La primera propiedad refleja la suposición implícita de Shapley: vamos a formar la coalición total y a repartirnos su utilidad. La segunda y la tercera reflejan nuestra intuición con respecto al papel que representan en los juegos los jugadores nulos y los pares de jugadores equivalentes, respectivamente, y los ejemplos que han seguido a las definiciones correspondientes apoyan esta intuición. Además, estas dos propiedades formalizan también la idea de justicia que se mencionó al final del ejemplo 1. Así pues, el lector estará seguramente de acuerdo con nosotros en la racionalidad de las tres primeras propiedades. En cambio, es posible que muestre cierta reticencia con respecto a la cuarta, puesto que su significado escapa a la intuición y recuerda simplemente propiedades operativas rutinarias como "la derivada de una suma es la suma de derivadas" u otras semejantes.

Hagamos un ejercicio interesante. Por razones que podríamos calificar de "comodidad intelectual", la regla del reparto proporcional ha sido y es usada a menudo en muy diversos contextos. Detengámonos un instante a reflexionar sobre las virtudes o los defectos de esta regla en el marco planteado por Shapley.

Ejemplo 8 *-El reparto proporcional-*. Comencemos por establecer con toda precisión las posibilidades de actuación de esta regla. De entrada, su definición formal es la siguiente. La *regla proporcional*, que en adelante designaremos por π, asigna a cada juego u el reparto siguiente de $u(N)$ entre los jugadores:

$$\pi_i[u] = \frac{u(i)}{u(1)+u(2)+\ldots+u(n)} u(N) \text{ para cada } i \in N.$$

La primera observación pertinente es que esta fórmula *no* es aplicable a *todos* los juegos. Recuérdese, por ejemplo, el caso del *Plan Prever* (ejemplo 1): ¿cómo repartir de forma proporcional los 480€ entre los tres jugadores si las utilidades individuales son nulas? Por tanto, *el dominio de la regla proporcional es solamente una parte del conjunto de los juegos cooperativos*.

La segunda observación es que la regla proporcional no tiene en cuenta las utilidades de las coaliciones de tamaño intermedio: se basa solamente en las utilidades individuales $u(i)$ y la utilidad total $u(N)$. La falta de "finura" del

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

método es evidente, y más grave cuanto mayor es el número de jugadores involucrados en el juego.

Centrémonos ahora en las propiedades exigidas por Shapley. Es fácil comprobar que, en su dominio restringido, la regla proporcional satisface las propiedades 1 –eficiencia-, 2 -jugador nulo- y 3 -jugadores equivalentes-. Sin embargo, no cumple la condición 4 -aditividad-. El lector puede considerar aquí de nuevo que, al fin y al cabo, la aditividad es más bien un requisito "de matemática pura", y que poca trascendencia debe de tener en la práctica. Para convencerle de que esto no es así, veamos uno de los ejemplos que ilustran repetidamente este trabajo.

Ejemplo 9 *-Aditividad, regla proporcional y grupos de compra-*. Existe una relación estrecha entre los juegos c, d y b del ejemplo 3: $c = d + b$. ¿Qué ocurre al aplicar a los tres juegos la regla proporcional? La tabla 2 nos lo muestra.

i	$\pi_i[c]$	$\pi_i[d]$	$\pi_i[b]$
A	1000	908,046	0,000
B	1500	1316,667	183,333
C	2000	1725,287	366,667
Total	4500	3950,000	550,000

Tabla 2. "Regla proporcional y grupos de compra"

Como se observa en la tabla 2, la regla proporcional reparte, en efecto, costes y beneficios de forma eficiente. Sin embargo, es evidente que, aunque $c = d + b$, tenemos $\pi[c] \neq \pi[d] + \pi[b]$, de modo que *la proporcionalidad no satisface la propiedad aditiva*. ¡Y esto no es solamente un defecto de matemática pura! Es absurdo que una ley de reparto no dé resultados coherentes al aplicarla a costes reducidos por el descuento y a los beneficios derivados del mismo. Cada empresa debería sentirse igualmente satisfecha con el reparto de costes y con el de beneficios, y eso no es así. La regla de proporcionalidad muestra en este ejemplo un punto de irracionalidad que no debería aceptarse en absoluto.

En definitiva, la regla de proporcionalidad no satisface todos los requisitos de Shapley. ¿Existe alguna regla que los cumpla? ¿Más de una? Shapley dio respuesta a estas dos cuestiones con el resultado siguiente. Omitimos su demostración puesto que escapa claramente a los objetivos de este artículo.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Teorema 1 *(Shapley, 1953). Para cada conjunto de jugadores* $N=\{1,2,...,n\}$ *existe una y sólo una función* $\phi: G_N \to \mathbb{R}^n$ *que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, jugadores equivalentes y aditividad. Es la definida por la expresión*

$$\phi_i[u]=\sum_{S:i\in S}\gamma_n(s)[u(S)-u(S\setminus\{i\}]$$

para cada jugador $i\in N$ *y cada juego* $u\in G_N$, *siendo* $s = |S|$ *el tamaño de la coalición variable* S *y*

$$\gamma_n(s)=\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

el coeficiente de la contribución marginal del jugador i *a la coalición* S *.* □

Como puede verse, el resultado de Shapley es un *teorema de existencia y unicidad*. La solución ϕ definida unívocamente por este teorema se conoce como *valor de Shapley*. El valor de Shapley "premia" ponderadamente todas las contribuciones marginales del jugador a todas las coaliciones a las que pertenece y, por tanto, a diferencia de la regla proporcional, tiene en cuenta todas las coaliciones y no solamente las de tamaño extremo (es decir, las individuales y la total).

Observación 1. Para cada $i\in N$ se cumple que $\sum_{S:i\in S}\gamma_n(s) = 1$. En efecto: es claro que $\gamma_n(s)=\frac{(s-1)!n-s)!}{n!}=\frac{1}{n\binom{n-1}{s-1}}$ y que para cada s existen $\binom{n-1}{s-1}$ coaliciones S de tamaño s que contienen al jugador i. En consecuencia,

$$\sum_{S:i\in S}\gamma_n(s)=\sum_{s=1}^{n}\binom{n-1}{s-1}\frac{1}{n\binom{n-1}{s-1}}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{n}=1.$$

4. Aplicaciones del valor de Shapley

A continuación analizaremos con algún detalle las consecuencias del teorema de Shapley y aplicaremos el valor a los juegos propuestos en las dos primeras secciones.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Observación 2. Consideremos el caso n = 2. La fórmula explícita del valor de Shapley es, para el jugador i (= 1 ó 2) y tomando $j \neq i$,

$$\phi_i[u] = \frac{1}{2}[u(i) - u(\varnothing)] + \frac{1}{2}[u(i, j) - u(j)].$$

Podemos escribir la fórmula de una manera ligeramente distinta:

$$\phi_i[u] = u(i) + \frac{1}{2}[u(i, j) - u(i) - u(j)].$$

Para comparar, obsérvese que en el caso de la proporcionalidad se tiene

$$\pi_i[u] = u(i) + \frac{u(i)}{u(i) + u(j)}[u(i, j) - u(i) - u(j)].$$

Esto significa que, en un juego de dos jugadores, el valor de Shapley reparte las utilidades de una forma bastante sencilla: garantiza a los dos jugadores sus utilidades individuales y, una vez descontadas éstas, reparte a partes iguales el sobrante hasta completar la utilidad de la coalición total. La regla proporcional es *más complicada*.

Ejemplo 10. Ya hemos visto que la regla proporcional no es aplicable al juego del *Plan Prever* -ejemplo 1-. Apliquemos el valor de Shapley. Puesto que $u(\varnothing)$ = 0, $u(1)$ = 0, $u(2)$ = 0, $u(3)$ = 0, $u(1,2)$ = 180, $u(1,3)$ = 480, $u(2,3)$ = 0 y $u(1,2,3)$ = 480, el valor de Shapley asigna 270€ al primer jugador, 30€ al segundo y 180€ al tercero. El lector podría preguntarse por qué debe recibir un pago de 30€ el segundo jugador (el chatarrero) si, finalmente, es el tercero (el vecino) quien se queda el coche. Este pago se entiende como una compensación por su intervención en el proceso de la venta (quizá tenía un preacuerdo con el propietario para comprar el vehículo antes que el vecino decidiera hacer una oferta, o quizás haya servido al propietario para obtener una cantidad superior por el coche…).

Ejemplo 11 -*Distribución de costes*, ejemplo 2-. Recordemos la función característica de este juego en el conjunto de jugadores N = {A,B,C}:

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

c(A) = 200, c(B) = 448, c(C) = 448,
c(A,B) = 600, c(A,C) = 648, c(B,C) = 766, c(A,B,C) = 966.

Aplicando la regla proporcional y el valor de Shapley al juego c obtenemos dos maneras distintas de repartir el coste total derivado de un contrato conjunto de las tres localidades con el suministrador. La tabla 3 contiene los resultados y, como referencia, añadimos una primera columna con el coste individual que debería pagar cada localidad.

Observemos que, con respecto al coste individual, el valor de Shapley garantiza un ahorro del 4,0% a la localidad A, un 16,3% a la B y un 10,9% a C. Con respecto a la regla proporcional, el valor obliga a pagar un 8,9% más a la localidad A y un 1,1% más a la C, mientras que da a B un ahorro de un 5,0%. Las diferencias entre el reparto proporcional y el que da el valor son, pues, apreciables.

i	Coste Individual	$\pi_i[c]$	$\phi_i[c]$
A	200	176,2774	192
B	448	394,8613	375
C	448	394,8613	399

Tabla 3. "Acción de π y ϕ en *Distribución de costes*"

Esto debería hacernos reflexionar en el sentido siguiente: los motivos que han de decantarnos por una u otra solución al efectuar un reparto son las propiedades globales de la regla de reparto, y no las cantidades numéricas que se obtienen en el caso particular que estemos analizando.

Ejemplo 12 -*Grupos de compra*, ejemplo 3-. Como siempre, debemos partir de la función característica, pero en este caso tenemos tres juegos: el juego de costes sin descuentos c, el de costes con descuentos d y el de beneficios b. Puesto que ya hemos discutido la aplicación de la regla proporcional a los tres juegos en el ejemplo 9, nos limitaremos aquí a dar, en la tabla 4, el resultado de aplicar el valor de Shapley. En particular, el lector podrá observar que se satisface la propiedad aditiva: $\phi[c]=\phi[d]+\phi[b]$ puesto que $c=d+b$. Los porcentajes de ahorro que supone para cada empresa la aplicación del valor de Shapley (proporciones entre la tercera columna y la primera) son como sigue: el 11,25% para la empresa A, el 12,50% para la B y el 12,50% para C.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

i	$\phi_i[$	$\phi_i[d$	$\phi_i[b$
A	1000	887,50	112,50
B	1500	1312,50	187,50
C	2000	1750,00	250,00
Total	4500	3950,00	550,00

Tabla 4. "El valor para *Grupos de compra*"

Observación 3. El valor de Shapley no es el único concepto de solución que aparece en la bibliografía sobre juegos cooperativos, pero es uno de los más apreciados por diversas razones:

- Es aplicable a todo juego cooperativo y para un número arbitrario de jugadores
- Da para cada juego un único vector de reparto entre los jugadores -otros conceptos de solución sugieren solamente un conjunto de repartos "admisibles" sin llegar a seleccionar ninguno en especial-
- Está caracterizado axiomáticamente por una serie de propiedades simples y aceptables desde un punto de vista intuitivo que sustentan firmemente su racionalidad
- Su aplicación práctica no presenta mayores dificultades que la de otros conceptos de solución

5. Los juegos simples

Una de las clases más interesantes de juegos cooperativos es la de los *juegos simples*. Con este tipo de juegos describimos la capacidad de decisión de las coaliciones en un sistema de votación y podemos analizar la importancia estratégica de cada uno de los agentes que intervienen en el sistema. Comenzaremos con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 13 -*El consorcio*-. Imaginemos un consorcio formado por cuatro empresas: dos de ellas son semejantes por volumen de facturación, mientras que las otras dos, también semejantes entre sí, son de menor entidad. El equipo directivo del consorcio está formado por los gerentes de las cuatro empresas, a los que designaremos por 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

La toma de decisiones está estructurada de manera equilibrada. Para aprobar una propuesta es necesario, en principio, que tenga al menos el apoyo de -los gerentes de- las dos empresas principales. Sin embargo, con el fin de evitar un número excesivo de situaciones de *impasse* y agilizar el mecanismo decisorio, para salvar una posible discrepancia entre las empresas principales se admite también la aprobación de una propuesta si están a favor de la misma al menos una de las empresas principales y las dos empresas secundarias.

Resumimos esta información mediante la lista de las coaliciones de gerentes de empresas que, sin contener elementos superfluos, son capaces de asegurar la aprobación:

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}.$$

La lista completa de todas las coaliciones con fuerza suficiente para garantizar la aprobación es el resultado de ampliar cada una de las anteriores de todas las formas posibles:

$$W = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}.$$

Las restantes coaliciones carecen de dicha fuerza.

Hay una manera de definir un juego cooperativo que describa una situación de este tipo: consiste en asignar una utilidad convencional de 1 a cada coalición de la lista W, y 0 a las demás. Tenemos entonces un conjunto de cuatro jugadores $N = \{1,2,3,4\}$ y un juego u tal que $u(1,2) = u(1,2,3) = u(1,2,4) = u(1,3,4) = u(2,3,4) = u(1,2,3,4) = 1$, mientras que $u(S) = 0$ para cualquier otra coalición $S \subseteq N$.

Esto es lo que denominamos un juego simple. Antes de seguir adelante, formalicemos esta idea e introduzcamos la nomenclatura apropiada.

Definición 7. Sea $N = \{1,2,...,n\}$ un conjunto de jugadores. Se dice que un juego cooperativo u en N es un *juego simple* si satisface las condiciones siguientes:

1. $u(S) = 1$ ó 0 para cada coalición $S \subseteq N$
2. *Monotonía:* si $S \subset T$ entonces $u(S) \leq u(T)$

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Las coaliciones S tales que $u(S) = 1$ se denominan coaliciones *ganadoras*, y las restantes, *perdedoras*. Es tradicional designar por W la colección de las coaliciones ganadoras. La propiedad de monotonía se expresa formalmente por

$$S \subset T \text{ y } S \in W \Rightarrow T \in W .$$

La colección W determina completamente el juego u. Para definir un juego simple en un conjunto N de jugadores basta, pues, con especificar una colección W de coaliciones no vacías de N que tenga la propiedad de monotonía.

Dentro del conjunto de las coaliciones ganadoras destacan las coaliciones ganadoras *minimales*, que son aquéllas que no contienen ningún elemento innecesario para ser ganadoras. Dicho de otro modo, S es *ganadora minimal* si $S \in W$ pero $S \setminus \{i\} \notin W$ para cada $i \in S$. Usaremos el símbolo W^m para designar la colección de las coaliciones ganadoras minimales. Estas coaliciones tienen una propiedad que las caracteriza entre las ganadoras, la propiedad de *exclusión mutua*: ninguna coalición ganadora minimal contiene *estrictamente* a otra, es decir,

$$S,T \in W^m \Rightarrow S \not\subset T \text{ y } T \not\subset S .$$

Como es obvio, $W^m \subseteq W$. Puesto que ampliando de todas las formas posibles las coaliciones ganadoras minimales obtenemos todas las coaliciones ganadoras, queda claro que la colección W^m también determina el juego. Para definir un juego simple en un conjunto de jugadores N basta con especificar una colección W^m de coaliciones no vacías de N que tenga la propiedad de exclusión mutua.

6. Juegos de mayoría ponderada

El tipo de juego simple más frecuente en la práctica es el llamado *juego de mayoría ponderada*. En realidad, se trata de una generalización natural del ejemplo siguiente.

Ejemplo 14 -*Juegos de mayoría simétricos*-. Supongamos que un comité formado por n personas debe tomar decisiones. Se asigna un voto a cada persona y se exige, para la aprobación de una propuesta, que ésta reciba en votación como

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

mínimo cierta cantidad q de votos. Para evitar conflictos suele tomarse $q > n/2$ -y, por descontado, $q \leq n$-. El juego simple u que sirve de modelo para reflejar este mecanismo de toma de decisiones queda definido por la colección

$$W = \{S \subseteq N : |S| \geq q\}.$$

Es inmediato comprobar que W satisface la condición de monotonía. Se suele recordar el origen del juego u escribiendo

$$u \equiv [q;1,1,...,1].$$

Si q es el mínimo entero superior a $n/2$, se dice que este número representa la condición de *mayoría absoluta*. Si $q = n$, se dice que u es el *juego de unanimidad* -en este caso, la única coalición ganadora es el conjunto total N-. Los restantes valores intermedios de q se denominan *mayorías cualificadas*. -El término *mayoría simple* o *relativa* es mejor reservarlo para situaciones en las que los electores tienen más de dos alternativas, es decir, no se limitan a elegir entre dos opciones o a decir sí o no a una propuesta única para cambiar un *statu quo*-.

Aunque la idea de dar un voto a cada agente es la base de los sistemas democráticos -basta con recordar el eslogan "un hombre, un voto"-, en la práctica se producen con frecuencia asociaciones de carácter político, económico o social, debidas a razones ideológicas o estratégicas, que según la fuerza con que cohesionan a los jugadores pueden convertir una situación aparentemente simétrica en otra muy distinta.

En realidad, la dinámica es similar a la que rige el accionariado de las empresas. Cuando una empresa emite acciones para formar su capital, garantizarlo o incrementarlo, cada acción puede ser adquirida por una persona distinta -física o jurídica-. En la práctica, sin embargo, ninguna empresa tiene sus acciones repartidas de este modo. La mayoría de los accionistas tienen en su poder cierto número de acciones y, a menudo, éstas se concentran en muy pocas manos.

Con estos dos comentarios queremos dar a entender que es indispensable disponer de un modelo más general que el del ejemplo anterior para poder interpretar fielmente la forma de operar de la mayoría de los mecanismos de toma de decisiones por votación.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Junto a los del ámbito económico, los ejemplos de tipo político constituyen uno de los campos de aplicación más interesantes de la teoría de los juegos cooperativos. Las decisiones tomadas por los organismos políticos, ya sean a escala local –ayuntamientos-, autonómica, estatal o internacional -Unión Europea, Organización de Naciones Unidas, Fondo Monetario Internacional, etc.- nos afectan en mayor o menor medida como ciudadanos, por lo que el estudio a fondo de la estructura de tales organismos debería interesarnos también en el contexto en el que nos movemos.

Muchos de los mecanismos de votación empleados en tales situaciones deben describirse como juegos de mayoría ponderada, especialmente en el caso de organismos de representación en los que, más que los representantes individuales, son los partidos políticos los verdaderos protagonistas, debido a la disciplina de voto que imponen a sus miembros electos. Lo mismo ocurre con el funcionamiento de las juntas de accionistas, ya que el porcentaje de acciones que controla cada una de las personas que integran la junta es decisiva para la aprobación o no de las propuestas sometidas a votación.

Definición 8. Sea $N = \{1,2,...,n\}$ un conjunto de jugadores. Supongamos que cada jugador $i \in N$ tiene asignado un *peso* $w_i \geq 0$. El peso de una coalición arbitraria $S \subseteq N$ se define como la suma de los pesos de sus integrantes: $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$. Supongamos además que se ha fijado una *cuota* o condición de mayoría q tal que $0 < q \leq T$, siendo $T = w(N) = \sum_{i \in N} w_i$. Entonces se define un juego cooperativo u mediante las condiciones:

1. $u(S) = 1$ si $w(S) \geq q$
2. $u(S) = 0$ en otro caso

Es inmediato comprobar que u es un juego simple: cada coalición recibe una utilidad igual a 1 ó 0 y la monotonía es consecuencia de la no negatividad de los pesos. Escribimos $u \equiv [q; w_1, w_2, ..., w_n]$ y decimos que u es un *juego de mayoría ponderada*.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Esta representación de un juego de mayoría ponderada es la que ya hemos usado para los juegos de mayoría simétricos, que resultan ser un caso particular.

Ejemplo 15 *-El consorcio-*. Es posible presentar este juego como un juego de mayoría ponderada: $u \equiv [4;2,2,1,1]$. De hecho, también tenemos $u \equiv [8;4,4,2,2]$ o $u \equiv [4k;2k,2k,k,k]$ para cualquier k natural y representaciones "asimétricas" como $u \equiv [13;9,8,3,2]$. En general, todo juego simple representable como juego de mayoría ponderada admite infinitas representaciones. Sin embargo, *no todos los juegos simples pueden ser representados como juegos de mayoría ponderada*. Veamos uno.

Ejemplo 16. El ejemplo más sencillo, tanto por el número de jugadores como por el número de coaliciones ganadoras minimales, es el siguiente. Para $n = 4$ tomemos

$$W^m = \{\{1,2\},\{3,4\}\}.$$

Esta colección define un juego simple u porque cumple la condición de exclusión mutua. Para demostrar que no es posible darle una representación como juego de mayoría ponderada, razonaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que fuera $[q;w_1,w_2,w_3,w_4]$. Puesto que las coaliciones {1,4} y {2,3} son perdedoras, los cuatro pesos deberían satisfacer las condiciones siguientes:

$$w_1 + w_4 < q \leq w_3 + w_4 \qquad \text{y} \qquad w_2 + w_3 < q \leq w_1 + w_2 .$$

Simplificando se deducen las relaciones contradictorias $w_1 < w_3$ y $w_3 < w_1$, por lo que concluimos que la representación pretendida es imposible.

7. Jugadores con veto y dictadores

Introducimos a continuación dos conceptos que dan nombre a tipos de jugadores muy especiales que se presentan en ocasiones en los juegos simples. La terminología tiene su origen en la esfera política, puesto que en este contexto las votaciones constituyen la manera usual de tomar decisiones.

Definición 9. Sea u un juego simple definido en un conjunto de jugadores N.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

1. Un jugador $i \in N$ *posee veto* en el juego u si pertenece a todas las coaliciones ganadoras de u
2. Un jugador $i \in N$ es un *dictador* en el juego u si $W^m = \{\{i\}\}$

Un jugador con veto tal vez no puede por sí solo conseguir que se apruebe una propuesta pero puede *impedirlo*, ya que su presencia es indispensable para conseguir la formación de una coalición ganadora. Para comprobar que un jugador tiene veto basta con confirmar que pertenece a todas las coaliciones ganadoras *minimales* del juego.

Un dictador es un jugador con veto que, además, puede conseguir que se apruebe una propuesta sin necesitar el apoyo de nadie.

Ejemplo 17. Consideremos una junta de accionistas descrita por el juego de mayoría ponderada $u \equiv [51;46,30,14,10]$, donde tanto los pesos como la cuota -mayoría absoluta- reflejan porcentajes del total de acciones. En estas condiciones, no hay dictador ni jugadores con veto. Sin embargo,

- Si el accionista principal adquiere un 5% de acciones a uno o varios de los demás accionistas, entonces se convierte en dictador, ya que el juego se transforma en $u' \equiv [51;51,...]$

- Si el accionista principal adquiere solamente un 4% de acciones de los demás accionistas pasa a tener veto, puesto que entonces el juego es $u'' \equiv [51;50,...]$

8. Un ejemplo detallado: primera parte

Incluimos en esta sección un ejemplo que exponemos con todo detalle para ilustrar el tipo de cuestiones que se plantean al manejar juegos simples.

En las empresas cuyo capital está repartido entre diferentes socios es norma que las decisiones sobre la marcha de la empresa se tomen en las denominadas *juntas de socios*, a las que son convocados periódicamente todos los poseedores de acciones o participaciones. En estas juntas, las decisiones no se adoptan otorgando un voto a cada socio, sino que cada uno dispone de tantos votos como acciones o participaciones controla. Para aprobar una propuesta es indispensable que esté a

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

favor de la misma un conjunto de socios suficiente como para que reúnan, entre todos ellos, *más* del 50% del capital. Veamos un ejemplo numérico imaginario.

Ejemplo 18 -*BCN–TV*-. Supongamos que, en el momento de su constitución, la empresa de comunicación BCN–TV llevó a cabo una emisión de acciones, y que éstas están en manos de una empresa de capital público y de tres grandes empresas del sector, con los porcentajes que se indican a continuación:

- Empresa 1: Ayuntamiento de Barcinova, 36,25%
- Empresa 2: Catalonia Television (CTV), 34,50%
- Empresa 3: Cadena TER, 15,50%
- Empresa 4: Grupo Alpha, 13,75%

La regla para tomar decisiones es la que hemos mencionado: se aprueba una propuesta si está apoyada por un conjunto de empresas que controlen más del 50% de las acciones. Por tanto, el mecanismo queda descrito por el juego de mayoría ponderada

$$u \equiv [50{,}01;\ 36{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 13{,}75].$$

Conviene observar que, para ser ganadora, se le exige a cualquier coalición *superar* el 50% de las acciones: esto se impone para evitar la posibilidad de un empate y la correspondiente situación de *impasse*, y por ello hemos fijado una cuota del 50,01%. Así, las coaliciones {1,4} y {2,3} no son ganadoras porque controlan solamente el 50% exacto de las acciones.

Las coaliciones ganadoras minimales son

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3,4\}\}.$$

El juego simple u que describe esta situación queda, pues, definido por

$$u(1,2) = u(1,3) = u(1,2,3) = u(1,2,4) = u(1,3,4) = u(2,3,4) = u(1,2,3,4) = 1$$

y $u(S) = 0$ para las demás coaliciones -las perdedoras-.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Es conveniente notar la analogía entre el tipo de conflictos de intereses con implicaciones económicas reflejado en ejemplos como *El consorcio* o *BCN–TV* y el de carácter político subyacente en cualquier cámara parlamentaria. En ambos casos, se produce una pugna por el poder -poder de acción, poder de decisión-.

En los juegos cooperativos que plantean problemas de beneficios o costes la cuestión principal se centra en la forma de repartir entre los jugadores la utilidad de la coalición total. En el caso de los juegos simples, el interés radica en la obtención de algún tipo de *medida de poder* que permita valorar la importancia estratégica de cada uno de los agentes implicados en el juego.

En el caso de los juegos de mayoría ponderada, el peso de cada jugador no sirve como medida de su importancia -ni siquiera el peso relativo-, porque las distribuciones de peso son engañosas en este sentido: basta observar que, a menudo, las diferencias de peso entre jugadores no se reflejan en absoluto en diferencias de posición relativa al obtener la lista de las coaliciones ganadoras minimales.

Naturalmente, junto al interés por establecer una medida numérica de la distribución del poder, aparece después el interés por conocer cómo pueden afectar a dicha distribución variaciones en el reparto de pesos o modificaciones de la cuota. Veamos algunos casos posibles en el ejemplo precedente.

- Supongamos que el Ayuntamiento de Barcinova compra el 5% de acciones a cada una de las demás empresas. Esto le convierte en dictador, ya que el juego es ahora $u_1 \equiv [50{,}01;\ 51{,}25,\ 29{,}50,\ 10{,}50,\ 8{,}75]$. Como dictador, el Ayuntamiento puede imponer su voluntad a las empresas restantes, y ésta es una situación radicalmente distinta de la inicial. La pregunta es obvia: ¿Cuál es el poder de un dictador? ¿Y el de los restantes jugadores?

- Supongamos que solamente el Grupo Alpha vende un 5% de sus acciones al Ayuntamiento. El juego pasa a ser $u_2 \equiv [50{,}01;\ 41{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 8{,}75]$. ¿Habrá experimentado alguna variación la distribución de poder?

- Si, en cambio, el 5% de acciones que vende el Grupo Alpha va a las manos de CTV, el juego es $u_3 \equiv [50{,}01;\ 36{,}25,\ 39{,}50,\ 15{,}50,\ 8{,}75]$. ¿Consigue de

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

este modo CTV tener efectivamente más poder que el Ayuntamiento en el control de BCN–TV?

- Ciertas decisiones trascendentales se toman por mayoría cualificada. Supongamos que, volviendo a la distribución inicial de acciones, dicha mayoría es de 3/5, es decir, un 60% del total de acciones. El juego que refleja esta situación es $u_{3/5} \equiv [60; 36{,}25, 34{,}50, 15{,}50, 13{,}75]$. Observamos que en estas condiciones el Ayuntamiento y la Cadena TER necesitan el apoyo del Grupo Alpha, circunstancia que no se producía con la cuota ordinaria que impone la mayoría absoluta. ¿Cómo influye esta variación de la cuota en la distribución de poder?

- Si la mayoría cualificada aumenta hasta los 2/3, las dos primeras empresas pasan a disponer de veto y las otras dos desaparecen de la lista de coaliciones ganadoras minimales. ¿Qué cambios experimenta la distribución de poder con respecto a la precedente?

En conclusión, parece claro que, con relación a este ejemplo -y su generalización a muchas otras situaciones-, la primera pregunta a formular sería: ¿cómo describir de forma razonable una "distribución de poder" entre las cuatro empresas, a la vista del porcentaje de acciones que controla cada una y de la condición de mayoría exigida?

Desearíamos utilizar una hipotética medida de poder para contrastar los valores que nos proporcione con los porcentajes de acciones. ¿Es importante la ventaja del 1.75% de acciones que posee el Ayuntamiento de Barcinova frente a CTV? ¿Y la diferencia del 9% entre esta segunda empresa y la cadena TER? ¿Tiene algún poder de decisión el Grupo Alpha pese a ser el socio minoritario?

A continuación, quisiéramos aplicar la misma medida para responder a las cuestiones planteadas en los casos en que se producen variaciones en la distribución de acciones (por compraventa entre las empresas participantes o por ampliaciones de capital y, tal vez, aparición de nuevos socios) y/o en la mayoría exigida para tomar decisiones.

Para afrontar cuestiones de este tipo y otras similares conviene plantear las características que debería tener una medida de poder que pudiera ser aplicable a cualquier juego simple. Nos ocuparemos de ello en la sección siguiente al estudiar

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

el denominado *índice de poder de Shapley–Shubik*, que no es sino la restricción del valor de Shapley al dominio de los juegos simples.

9. El índice de poder de Shapley–Shubik

En la sección anterior hemos planteado, como objetivo principal del estudio de los juegos simples, el análisis de la "distribución de poder". Aunque la descripción de las coaliciones ganadoras minimales ya proporciona información sobre la importancia relativa de cada agente decisor dentro del sistema, desearíamos precisar su fuerza real de forma numérica.

No entraremos en disquisiciones filosóficas ni trataremos de dar una definición del concepto mismo de *poder*. Creemos que la intuición del lector le habrá permitido captar perfectamente nuestras intenciones a través de los ejemplos que se han propuesto. Hablaremos, pues, solamente de una "medida de poder".

En un mecanismo decisorio el "poder" viene a ser como una unidad de beneficio (un pastel, si se quiere) que hay que repartir entre los agentes de forma que refleje la importancia estratégica de cada uno. En este sentido, el problema no es muy diferente del que nos ocupaba en los juegos cooperativos en general.

Por tanto, una medida de la distribución de poder vendrá dada, en términos muy generales, por una asignación $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tal que

1. $\alpha_i \geq 0$ para cada $i \in N$

2. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

siendo $N = \{1,2,...,n\}$ el conjunto de agentes decisores.

Ésta es una idea general de *medida* de la que también son casos particulares, entre otras, las distribuciones de frecuencia relativa o las de probabilidad. El hecho de que la medida esté *normalizada* -condición 2-, permitirá comparar situaciones distintas.

Traduciremos estas ideas al lenguaje de los juegos simples. Sea $N = \{1,2,...,n\}$ un conjunto de jugadores. Denotaremos por S_N el conjunto de todos los juegos

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

simples no nulos en N. Excluimos el juego nulo $u = 0$ -donde $W = \varnothing$- por razones obvias.

Definición 10. Una *medida de poder* en *N* es una función $\phi : S_N \to [0,1]^n$, que asigna a cada juego simple no nulo u un vector de reparto entre los jugadores

$$\phi[u] = \left(\phi_1[u], \phi_2[u], ..., \phi_n[u]\right)$$

tal que $\sum_{i=1}^{n} \phi_i[u] = 1$.

El símbolo $[0,1]^n$ representa el producto cartesiano $[0,1]\times[0,1]\times...\times[0,1]$ y, en consecuencia, se garantiza que $0 \le \phi_i[u] \le 1$ para cada jugador $i \in N$.

La definición anterior es poco restrictiva y, por tanto, existen muchas medidas de poder posibles. Sin embargo, la primera precisión que debemos hacer es que *la regla proporcional no sirve como medida de poder*. En efecto, puesto que en los juegos simples tenemos casi invariablemente $u(i) = 0$ para cada jugador $i \in N$, la suma de estas utilidades es nula y no es posible, prácticamente nunca, llevar a cabo un reparto proporcional.

En 1954, Shapley y el economista Martin Shubik propusieron la aplicación del valor de Shapley a los juegos simples como medida de poder. A continuación estudiaremos el significado y el alcance de esta propuesta.

Proposición 1. La restricción del valor de Shapley al conjunto de los juegos simples no nulos es una medida de poder.

Demostración. En primer lugar, el valor está definido para cualquier juego cooperativo, y en particular para todos los juegos simples no nulos. Además, gracias a la propiedad de monotonía de los juegos simples tenemos $\phi_i[u] \ge 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada juego -simple- u. Por último, la propiedad de eficiencia y el hecho de que tratemos con juegos simples no nulos implican que se satisfaga la condición $\sum_{i=1}^{n} \phi_i[u] = 1$. □

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

A esta medida de poder se la conoce con el nombre de *índice de poder de Shapley–Shubik*. Además de la eficiencia, otras dos de las cuatro propiedades que caracterizan al valor de Shapley tienen una interpretación inmediata y satisfacen la intuición:

- Si un jugador i es nulo en un juego u, $\phi_i[u] = 0$
- Si dos jugadores i, j son equivalentes en un juego u, $\phi_i[u] = \phi_j[u]$

Las propiedades de eficiencia, jugador nulo y jugadores equivalentes son útiles para simplificar el cálculo práctico de la distribución del poder en un juego dado. La cuarta propiedad del valor, la aditiva, no tiene aplicación en el dominio de los juegos simples no nulos, ya que la suma de dos juegos de este tipo *nunca* es un juego simple.

En 1975, Pradeep Dubey estableció una caracterización axiomática del índice de poder de Shapley–Shubik -es decir, como función sobre el conjunto de los juegos simples no nulos- análoga a la del valor de Shapley. Para ello utilizó los axiomas de eficiencia, jugador nulo y jugadores equivalentes y una nueva propiedad, la de *transferencia*, que es consecuencia de la aditiva y la sustituye como axioma en el conjunto de los juegos simples. Omitimos los detalles pero queremos dejar constancia de este hecho.

10. Cálculo práctico del índice de poder de Shapley–Shubik

Veamos con dos ejemplos concretos cómo calcular de forma práctica el índice de poder de Shapley–Shubik. En el primer ejemplo aplicamos directamente la fórmula del valor de Shapley adaptándola a los juegos simples. En el segundo, los axiomas nos dan la distribución de poder sin necesidad de efectuar apenas ninguna operación.

Ejemplo 19 -*El consorcio*-. En este juego tenemos -véase ejemplo 13-.

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}.$$

No hay dictador, ni jugadores con veto ni jugadores nulos pero, observando el conjunto de las coaliciones minimales, por una parte las empresas 1 y 2 son equivalentes entre sí y por otra lo son también las empresas 3 y 4. Por tanto,

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

podemos limitarnos a calcular de forma directa el poder de la empresa 1. La fórmula del valor de Shapley nos da

$$\phi_1[u] = 1/12 + 1/12 + 1/12 + 1/12 = 1/3.$$

Por tanto, aplicando el axioma de jugadores equivalentes, $\phi_2[u] = \phi_1[u] = 1/3$. Por el axioma de eficiencia, el poder a repartir entre las empresas 3 y 4 es $1 - 2/3 = 1/3$ y, de nuevo por el axioma de jugadores equivalentes, $\phi_3[u] = \phi_4[u] = 1/6$. En resumen, la distribución de poder en este consorcio viene dada por

$$\phi[u] = (1/3,1/3,1/6,1/6),$$

de manera que las empresas principales poseen doble poder que las secundarias.

Ejemplo 20 *-Juegos de mayoría simétricos-*. En un juego de este tipo, $u \equiv [q;1,1,...,1]$, el cálculo de la distribución de poder es muy simple. No hay dictador, ni vetos ni jugadores nulos, y es obvio que todos los jugadores son equivalentes. Por el tercer axioma del valor, esto implica que $\phi_i[u]$ es constante, es decir, no depende de i. Vemos pues que *en un juego de mayoría simétrico todos los jugadores tienen el mismo poder, independientemente de la cuota de mayoría exigida*. Del axioma de eficiencia se deduce que este poder es $\phi_i[u] = 1/n$ para todo $i \in N$.

Antes de proseguir con los demás ejemplos, presentamos un método de cálculo del índice de Shapley–Shubik que, en ocasiones, puede sustituir con ventaja al uso de la fórmula del valor.

Sea $N = \{1,2,...,n\}$, como siempre, el conjunto de los jugadores. Una *permutación* de los jugadores es una ordenación particular de los mismos. Sea u un juego simple no nulo en el conjunto N. Sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ una permutación cualquiera de N. Si imaginamos que se va formando una coalición a partir de σ_1, añadiendo jugadores uno a uno en el orden indicado por la permutación, siempre llegaremos a encontrar un primer jugador σ_k que, al integrarse, convierta de perdedora en ganadora la coalición que forman quienes le preceden en la permutación. De forma equivalente, *existe un único* jugador σ_k con las dos

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

propiedades siguientes: (a) $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_{k-1}\}\notin W$; (b) $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k\}\in W$. Decimos entonces que σ_k es el *jugador crucial* o *pivote* de la permutación σ .

Contemos ahora el número de veces que cada jugador $i\in N$ es pivote en el total de las $n!$ permutaciones posibles. Convirtamos este número en frecuencia relativa dividiéndolo por $n!$ y sea $\psi_i[u]$ dicha frecuencia.

Teorema 2 *-Cálculo del poder por pivotes-.* Para cada juego simple no nulo u en N y cada jugador $i\in N$ se verifica la igualdad $\phi_i[u]=\psi_i[u]$.

Demostración. Recordemos la expresión del poder del jugador i que ya hemos utilizado en el caso del consorcio (ejemplo 19):

$$\phi_i[u]=\sum_{S\in W:i\in S,S\setminus\{i\}\notin W}\gamma_n(s)\,.$$

Observemos que cada coalición S tal que $i\in S$, $S\in W$ y $S\setminus\{i\}\notin W$ define muchas permutaciones en las que i es pivote. Concretamente, las $(s-1)!(n-s)!$ permutaciones que podemos escribir colocando en las $s-1$ primeras posiciones los $s-1$ elementos de $S\setminus\{i\}$ en cualquier orden (de ahí el factor $(s-1)!$), el jugador i en la posición s, y los $n-s$ elementos de $N\setminus S$ en las $n-s$ posiciones finales (de ahí el factor $(n-s)!$). Por tanto, $\phi_i[u]\le\psi_i[u]$.

Sin embargo, dado que $\sum_{i=1}^{n}\phi_i[u]=1=\sum_{i=1}^{n}\psi_i[u]$, se concluye que la desigualdad anterior debe reducirse a una igualdad para todo $i\in N$. □

El teorema puede interpretarse diciendo que, en un juego simple no nulo, el poder de un jugador es la probabilidad de ser crucial en una permutación cuando todas las permutaciones se suponen igualmente probables.

Podemos, pues, usar este resultado para calcular el índice de poder de Shapley–Shubik. Cuando $n\le 4$, lo más directo es escribir las $n!$ permutaciones y contar sobre ellas el número de veces que es pivote cada jugador, aunque sin olvidar las reglas que conocemos sobre jugadores nulos, jugadores equivalentes y eficiencia

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

para simplificar el cálculo del poder. Cuando el número de jugadores es mayor, a menudo basta considerar "tipos" de permutaciones, y en algún caso es más fácil comenzar contando las veces que el jugador no es pivote.

Ejemplo 21. Calculemos el índice de poder de Shapley–Shubik del juego de mayoría ponderada $u \equiv [3;2,1,1,1]$. El número de jugadores es $n = 4$ y la colección de coaliciones ganadoras minimales es

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\}\}.$$

En la tabla 5 escribimos las 24 permutaciones (4!) de los jugadores 1, 2, 3 y 4 y enmarcamos en cada una de ellas el jugador que es pivote:

(1,**2**,3,4)	(2,**1**,3,4)	(3,**1**,2,4)	(4,**1**,2,3)
(1,**2**,4,3)	(2,**1**,4,3)	(3,**1**,4,2)	(4,**1**,3,2)
(1,**3**,2,4)	(2,3,**1**,4)	(3,2,**1**,4)	(4,2,**1**,3)
(1,**3**,4,2)	(2,3,**4**,1)	(3,2,4,1)	(4,2,**3**,1)
(1,**4**,2,3)	(2,4,**1**,3)	(3,4,**1**,2)	(4,3,**1**,2)
(1,**4**,3,2)	(2,4,**3**,1)	(3,4,**2**,1)	(4,3,**2**,1)

Tabla 5. "Cálculo del poder por pivotes"

Esto nos indica que $\phi[u]$ = (12/24,4/24,4/24,4/24) = (1/2,1/6,1/6,1/6,). En este ejemplo, puesto que los jugadores 2, 3 y 4 son equivalentes, bastaba con calcular el poder de uno cualquiera de los cuatro para determinar el de los demás.

Ejemplo 22 -*El Parlamento de Cataluña, 2006–2010*-. Como ya dijimos, parte de la terminología que se usa en los juegos simples tiene su origen en la esfera política. Veamos brevemente un ejemplo de este tipo. Durante la legislatura 2006–2010, la distribución de los 135 escaños del Parlamento de Cataluña es la que se indica en la tabla 6. En dicha tabla se muestra también el porcentaje de escaños que tiene cada uno de los seis partidos.

Dada la estricta disciplina de voto que impera dentro de cada partido, en esta situación los agentes reales son los seis partidos presentes y no los 135 diputados. Para aprobar una moción es necesario tener al menos el apoyo de más de la mitad de los diputados de la Cámara, es decir, 68 como mínimo. Podemos analizar este órgano parlamentario usando el juego de mayoría ponderada $u \equiv$[68; 48, 37, 21, 14, 12, 3].

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Partido	CiU	PSC	ERC	PP	IC–V	CPC
Escaños	48	37	21	14	12	3
Porcentaje	35,56%	27,41%	15,56%	10,37%	8,89%	2,22%

Tabla 6. **"**Distribución de escaños en el Parlamento de Cataluña"

Para ser coherentes con la notación que venimos utilizando, denotaremos los partidos simplemente por 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Se entiende que 1 hace referencia a CiU, 2 a PSC y así sucesivamente. De este modo, el conjunto de coaliciones ganadoras minimales es

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\}\}.$$

A la vista de las coaliciones ganadoras minimales es claro que el partido 6 es nulo. La tabla 7 muestra el poder de cada partido en porcentaje.

Partido	CiU	PSC	ERC	PP	IC–V	CPC
Poder	40,00%	23,33%	23,33%	6,67%	6,67%	0,00%

Tabla 7. Distribución del poder en el Parlamento de Cataluña

Se concluye que la distribución de poder no tiene demasiado que ver con la distribución de escaños. CiU y sobre todo ERC se encuentran en una posición estratégica mejor que la que parece sugerir para cada uno su porcentaje de escaños. En cambio, el PSC, el PP e IC–V se encuentran peor. Por último, CPC no tiene ninguna relevancia estratégica pese a sus escaños.

Este ejemplo ilustra bien las relaciones que existen en general entre peso y poder en los juegos de mayoría ponderada:

- A pesos iguales, igual poder
- A mayor peso, mayor o igual poder
- Peso positivo no implica poder positivo
- Las diferencias en (porcentajes de) peso no se traducen en diferencias similares en poder; en ocasiones, ni siquiera producen diferencias de poder

11. Un ejemplo detallado: segunda parte

Reanudamos el estudio del ejemplo que propusimos en la sección 8. Ahora podemos medir el poder de cada jugador en cualquier situación que se considere.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Ejemplo 23 *-BCN–TV-.* Como hemos visto al presentarla -ejemplo 18-, esta situación queda descrita por el juego de mayoría ponderada

$$u \equiv [50{,}01;\ 36{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 13{,}75],$$

siendo la colección de las coaliciones ganadoras minimales

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3,4\}\}.$$

En este juego no hay dictador ni jugadores con veto, pero las empresas 2 y 3 son equivalentes. Si calculamos el índice de poder de Shapley–Shubik de cada jugador se obtiene: $\phi_1[u] = 41{,}67\%$, $\phi_2[u] = \phi_3[u] = 25{,}00\%$ y $\phi_4[u] = 8{,}33\%$.

Podemos obtener también la distribución de poder en cada uno de los supuestos formulados en el ejemplo 18 y contestar a todas las preguntas que nos hacíamos allí.

La tabla 8 nos indica, en su primera fila, el porcentaje inicial de peso -acciones- de cada empresa. Después muestra la distribución inicial de poder en la fila (0) y las distribuciones de poder cuando se producen las variaciones de pesos indicadas en el ejemplo 18 y que ahora recordamos:

1. El Ayuntamiento de Barcinova -empresa 1- compra un 5% de acciones a cada una de las empresas restantes. Ahora $W_1^m = \{\{1\}\}$ porque el juego es
$$u_1 \equiv [50{,}01;\ 51{,}25,\ 29{,}50,\ 10{,}50,\ 8{,}75]$$
2. Solamente el Grupo Alpha (empresa 4) vende un 5% al Ayuntamiento. En este caso el nuevo juego es $u_2 \equiv [50{,}01;\ 41{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 8{,}75]$ y, por tanto, $W_2^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3,4\}\}$.
3. El Grupo Alpha vende un 5% a CTV (empresa 2). Esto nos da el juego $u_3 \equiv [50{,}01;\ 36{,}25,\ 39{,}50,\ 15{,}50,\ 8{,}75]$ y $W_3^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

	Ayuntamiento de Barcinova	Catalonia Television	Cadena TER	Grupo Alpha
Peso	36,25 %	34,50 %	15,50 %	13,75 %
(0)	41,67 %	25,00 %	25,00 %	8,33 %
(1)	100,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
(2)	41,67 %	25,00 %	25,00 %	8,33 %
(3)	33,33 %	33,33 %	33,33 %	0,00 %

Tabla 8. "Distribución del poder según la distribución de acciones"

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Al comparar las dos primeras filas de la tabla 8 observamos que hay claras diferencias entre peso y poder. El 1,75% de diferencia entre el Ayuntamiento de Barcinova y CTV es muy importante, al igual que el 1,75% que separa a la Cadena TER del Grupo Alpha. En cambio, el 19% de ventaja de CTV sobre la Cadena TER no tiene ningún efecto sobre la distribución de poder. Dicho de otra forma, el Ayuntamiento de Barcinova y sobre todo la Cadena TER obtienen el mejor rendimiento de sus acciones en términos de poder. Las otras dos empresas están en peores condiciones. Sin embargo, el Grupo Alpha dispone de cierto poder pese a ser el socio menos importante en BCN–TV.

Contrastemos la distribución inicial de poder dada por la fila (0) con las siguientes. En primer lugar, la compra por parte del Ayuntamiento de Barcinova de un 5% de acciones a cada una de las demás empresas coloca al ente público en posición de dictador, lo que queda reflejado en la distribución de poder de la fila (1).

La venta de un 5% de acciones del Grupo Alpha al Ayuntamiento no produce ninguna variación en la lista de las coaliciones ganadoras minimales ni, por tanto, en la distribución de poder, dada ahora por la fila (2), que depende exclusivamente de esa lista. En cambio, el paso de ese 5% de acciones del Grupo Alpha a CTV trastorna totalmente la situación: convierte al Grupo Alpha en un jugador nulo, y por tanto con poder 0, y en jugadores equivalentes a las otras tres empresas pese a las diferencias notables en los porcentajes de acciones que controlan. La fila (3) refleja adecuadamente esta equivalencia y vemos que CTV no consigue superar en poder al Ayuntamiento de Barcinova pero sí igualarlo, al tiempo que esta operación aumenta la importancia estratégica de la Cadena TER sin que esta empresa haya intervenido en ella.

La tabla 9 nos indica, en su primera fila, el porcentaje inicial de peso de cada empresa. Después muestra la distribución inicial de poder en la fila (1/2) y las distribuciones de poder cuando se producen las variaciones de cuota indicadas al final del ejemplo 18, a saber:

- (3/5) Se exige una mayoría de 3/5 (60% de acciones) para la aprobación de una propuesta. El juego es $u_{3/5} \equiv [60;\ 36{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 13{,}75]$ y, por tanto, $W^m_{3/5}$ = {{1,2},{1,3,4},{2,3,4}}

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

- (2/3) Se exige una mayoría de 2/3 (66.67% de acciones) para la aprobación. Aquí $u_{2/3} \equiv$ [66,67; 36,25, 34,50, 15,50, 13,75] y, por tanto, $W^m_{2/3}$ = {{1,2}}

	Ayuntamiento de Barcinova	Catalonia Television	Cadena TER	Grupo Alpha
Peso	36,25%	34,50%	15,50%	13,75%
(1/2)	41,67%	25,00%	25,00%	8,33%
(3/5)	33,33%	33,33%	16,67%	16,67%
(2/3)	50,00%	50,00%	0,00%	0,00%

Tabla 9. "Distribución del poder al cambiar la cuota"

Como vemos en la tabla 9, el aumento de la mayoría exigida minimiza aún más las diferencias de capacidad estratégica derivadas de los porcentajes de acciones. Con mayoría de 3/5, el Ayuntamiento de Barcinova y CTV quedan con el mismo poder, y lo mismo les ocurre a la Cadena TER y el Grupo Alpha, que pasan a ser también jugadores equivalentes. Al pasar a mayoría de 2/3, las dos empresas principales adquieren veto, mientras las otras dos pasan a ser jugadores nulos y aquéllas se reparten equitativamente todo el poder.

Creemos que este ejemplo detallado muestra que el índice de Shapley–Shubik es una buena medida numérica del poder -léase importancia estratégica- de los agentes que intervienen en un mecanismo de toma de decisiones. También demuestra que el índice posee una acusada *sensibilidad* a los cambios que se producen en el juego: en este caso, cambios en la distribución del accionariado o en la condición de mayoría exigida.

12. Juegos impropios

No todos los mecanismos de decisión mediante votaciones pueden ser descritos como juegos de mayoría ponderada -véase el ejemplo 16-. Sin embargo, el índice de poder de Shapley–Shubik también nos proporciona una medida de la posición estratégica de los jugadores en estos juegos.

Ejemplo 24 -*Un juego impropio*-. El juego simple más sencillo entre los que no pueden representarse como juegos de mayoría ponderada es el juego u con $n=4$ jugadores cuya lista de coaliciones ganadoras minimales es W^m = {{1,2},{3,4}} -ejemplo 16)-.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

En este caso, hay dos pares de jugadores equivalentes entre sí: 1 y 2 por una parte, y 3 y 4 por otra. Calculando mediante pivotes la distribución de poder, se obtiene fácilmente $\phi_1[u] = \phi_2[u] = \phi_3[u] = \phi_4[u] = 1/4$.

Esto ilustra el hecho de que ser jugadores equivalentes es suficiente pero no necesario para tener igual poder.

Este juego tiene una característica singular entre todos los que hemos estudiado: existen coaliciones ganadoras disjuntas, es decir, sin elementos comunes, que en este caso son {1,2} y {3,4}. Se dice que estos juegos simples son *impropios* porque pueden presentar dificultades de interpretación como representación de mecanismos de toma de decisiones. Veremos, sin embargo, que se ajustan perfectamente a situaciones bien plausibles. Necesitamos un último concepto teórico.

Definición 11. Un juego simple u es *superaditivo* si $u(S \cup T) \geq u(S) + u(T)$ cuando $S \cap T = \varnothing$.

No es difícil demostrar que un juego simple es superaditivo si, y sólo si, toda pareja de coaliciones ganadoras minimales tiene intersección no vacía: $S \cap T \neq \varnothing$ para cualesquiera $S, T \in W^m$.

Observación 4. Los mecanismos de decisión colectiva por votación suelen aplicarse en dos tipos de situaciones: 1) cuando se presentan dos alternativas y hay que elegir una de ellas forzosamente; 2) cuando se presenta una sola propuesta para modificar un *statu quo* ya existente.

Como ilustración, supongamos que los socios que participan en BCN–TV se enfrentan a la cuestión siguiente: elegir, entre dos candidatos bien cualificados, al sustituto del director general de programación de la emisora, que acaba de presentar una dimisión irrevocable. Ésta es una situación del tipo 1. Supongamos, en cambio, que deben decidir sobre la propuesta de extender la programación de manera que se emita de forma ininterrumpida las 24 horas del día. Ésta es una situación del tipo 2, porque la desestimación de la propuesta simplemente deja las cosas como estaban -*statu quo*-.

En el primer caso, es esencial que el mecanismo corresponda a un juego simple superaditivo, ya que de lo contrario podría darse un conflicto si una coalición

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

ganadora apoyase la primera de las dos alternativas -candidatos, en el ejemplo anterior- y otra coalición, ganadora también, apoyase la segunda: ¿cuál debería entonces escogerse?

En este caso, conviene incluso que el juego sea *fuerte*, es decir, tal que dada una coalición y su complementaria una de las dos sea ganadora. Un juego simple superaditivo y fuerte se denomina *decisivo*, y podemos resumir las dos condiciones en una sola: un juego simple u, definido por la colección W, es decisivo si y sólo si se cumple que

$$S \in W \Leftrightarrow N \setminus S \notin W \quad \text{para toda } S \subseteq N .$$

Si el juego es superaditivo pero no decisivo, puede darse la posibilidad de que ninguna de las alternativas cuente con votos suficientes para ser elegida. Esta dificultad, no tan grave como la que se derivaría de un juego impropio, puede subsanarse reformulando la disyuntiva -por ejemplo, abriendo un nuevo período de presentación de candidaturas-.

En el segundo caso, la superaditividad no es crucial. Se da, simplemente, una lista de las coaliciones que pueden *promover* una acción: si alguna de ellas vota afirmativamente, la acción -modificación del *statu quo*- se lleva a cabo; si no, las cosas siguen como antes. Podríamos decir que no hay urgencia de decidir. Cualquier juego simple no nulo es, en principio, adecuado para tomar decisiones de esta índole.

En definitiva, la medida de poder que hemos propuesto se aplica perfectamente tanto a juegos –simples- superaditivos como a juegos impropios, puesto que no tiene nada que ver con el tipo de cuestión sobre el que deciden los agentes del sistema que representamos mediante un juego simple.

Ilustraremos el comentario anterior mediante un ejemplo de lo que podríamos llamar también *poder de acción*.

Ejemplo 25. Supongamos que una empresa se encuentra en mala situación económica. Sus acreedores son las empresas 1, 2, 3 y 4. Imaginemos que, por el volumen de las deudas acumuladas, las coaliciones mínimas de acreedores que pueden instar ante un juez, con garantías de éxito, la declaración de suspensión de pagos de la empresa deudora son las siguientes: $W^m = \{\{1\},\{2,3,4\}\}$.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

Esta lista define un juego simple -impropio- u. Aplicando el índice de poder de Shapley–Shubik a este juego obtenemos $\phi[u]$ = (9/12,1/12,1/12,1/12), lo que nos muestra de forma numérica precisa la *capacidad* individual de cada empresa para lograr el objetivo: la declaración de suspensión de pagos por parte del juez. Conviene observar en este juego que, aunque el jugador 1 forma por sí solo una coalición ganadora, no es dictador, porque existen otras coaliciones ganadoras minimales. Esto es posible porque el juego es impropio.

13. Conclusiones

Este trabajo presenta diversas contribuciones originales a la teoría de juegos en lo que se refiere tanto a sus fundamentos como a sus aplicaciones al contexto empresarial.

Se han planteado problemas cooperativos originales entre empresas, como reparto de costes de un bien común o distribución de beneficios derivados de la formación de grupos de compra. Se han analizado los axiomas propuestos por Shapley y, a la luz de los mismos, se han puesto de manifiesto diversos defectos de la regla proporcional como mecanismo de reparto: dominio restringido, doble discriminación en el caso n = 2, falta de sensibilidad estratégica (que aumenta al crecer el número de jugadores) al ignorar las utilidades de las coaliciones de tamaño intermedio y, sobre todo, carencia de aditividad. Este último no se reduce a una leve cuestión técnica sino que conduce a graves inconsistencias de la regla proporcional en la práctica, al resultar incoherentes su forma de repartir costes con la de repartir los ahorros asociados a dichos costes.

En consecuencia, se ha propuesto razonadamente el valor de Shapley como instrumento idóneo, sensible y consistente en los problemas cooperativos de reparto de costes, beneficios o utilidades en general, ya que carece de todos los defectos anteriores y está sustentado por un sistema axiomático elegante e intuitivo y un teorema de existencia y unicidad. Los ejemplos considerados ilustran adecuadamente las virtudes del valor.

Se han planteado también problemas de toma de decisiones en diferentes ámbitos como las juntas de accionistas o los organismos de tipo parlamentario, que quedan representados por los juegos simples, y se ha evidenciado la conveniencia de disponer de una medida del poder estratégico de cada jugador. Se ha descartado en seguida la posibilidad de usar la regla proporcional por razones obvias de mera

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

inaplicabilidad. En cambio, se ha propuesto la restricción del valor de Shapley a los juegos simples -el llamado índice de poder de Shapley–Shubik- como medida adecuada de la distribución de poder formal -es decir, no afectado por afinidades o rechazos ideológicos- entre los agentes de cualquier organismo estructurado para tomar decisiones, ya sean éstas de índole política, económica o social. También aquí, los ejemplos utilizados han ilustrado a la perfección el significado y la sensibilidad del índice de poder.

Agradecimientos

Investigación financiada parcialmente por los proyectos SGR2005–00651 -*Departament d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació de la Generalitat de Catalunya*- y MTM2006–06064 -*Ministerio de Educación y Ciencia y fondos FEDER*-. Los autores agradecen a uno de los evaluadores anónimos y al profesor Manel Rajadell, del Departamento de Organización de Empresas de la UPC, sus valiosos comentarios.

Referencias

BILBAO, J. M.; FERNÁNDEZ, F. R. (editores) (1999). *Avances en teoría de juegos con aplicaciones económicas y sociales*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

DAVIS, M. D. (1986). *Introducción a la teoría de juegos*. Alianza Editorial, 4ª. ed.

DUBEY, P. (1975). On the uniqueness of the Shapley value. *International Journal of Game Theory*, 4: 131–139.

MAGAÑA, A.; RAJADELL, M. (1997). Contribuciones y participaciones de socios en cooperaciones interempresariales. *Boletín de Estudios Económicos*, 52: 575–586.

ORTMANN, K. M. (2000). The proportional value for positive cooperative games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 51: 235–248.

OWEN, G. (1995). *Game Theory*. Academic Press, 3ª. ed.

RAFELS, C. (coordinador) (1999). *Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques*. Edicions de la Universitat de Barcelona.

©© Intangible Capital, 2008 – (4)2: 102-142 – ISSN: 1697-9818

ROTH, A. E. (editor) (1988). *The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge University Press.

SHAPLEY, L. S. (1953). A value for n–person games. *Annals of Mathematical Studies*, 28: 307–317.

SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. (1954). A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American Political Science Review*, 48: 787–792.

©© Intangible Capital, 2008 (www.intangiblecapital.org)

SOME RIGHTS RESERVED

El artículo está con Reconocimiento-NoComercial 2.5 de Creative Commons. Puede copiarlo, distribuirlo y comunicarlo públicamente siempre que cite a su autor y a Intangible Capital. No lo utilice para fines comerciales. La licencia completa se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.5/es/